微积分基本公式

高等数学 I-信息、统计外招

Weiwen Wang(王伟文)

暨南大学

2025 年秋季学期

课程网页

如果积分上限制 x 在区间 $[a,b]$ 上任意变动，那么对于每一个取定的 x 值，定积分有一个对应的值，所以它在 $[a,b]$ 上定义了一个函数，记作 $\Phi(x)$:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \quad (a \le x \le b)$$

定理 1

如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，那么积分上限的函数

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

在 $[a,b]$ 上可导，并且它的导数

$$\Phi'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = f(x).$$

证明.

若 $x \in (a,b)$, 且对于增量 Δx, $x+\Delta x \in (a,b)$, 积分上限函数的增量为

$$\begin{aligned}\Delta\Phi &= \Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)\\ &= \int_a^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t - \int_a^{x} f(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

证明.

若 $x \in (a,b)$, 且对于增量 Δx, $x + \Delta x \in (a,b)$, 积分上限函数的增量为

$$
\begin{aligned}
\Delta\Phi = \Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) \\
&= \int_a^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_a^x f(t)\mathrm{d}t + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_x^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

证明.

若 $x \in (a,b)$, 且对于增量 Δx, $x+\Delta x \in (a,b)$, 积分上限函数的增量为

$$\begin{aligned}\Delta\Phi &= \Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)\\ &= \int_a^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t - \int_a^{x} f(t)\mathrm{d}t\\ &= \int_a^{x} f(t)\mathrm{d}t + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t - \int_a^{x} f(t)\mathrm{d}t\\ &= \int_x^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

由积分中值定理, 存在 $\xi \in [x, x+\Delta x]$, 使得 $\int_x^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t = \Phi(\xi)\Delta x$. 故

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = f(\xi).$$

续.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(\xi)$$

续.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}f(\xi)$$

注意到 $\xi\in[x,x+\Delta x]$, 故当 $\Delta x\to 0$ 时, $\xi\to x$, 又因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续. 因此

$$\lim_{\Delta x\to 0}f(\xi)=f(\lim_{\Delta x\to 0}\xi)=f(x)$$

续.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}f(\xi)$$

注意到 $\xi\in[x,x+\Delta x]$, 故当 $\Delta x\to 0$ 时, $\xi\to x$, 又因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续. 因此

$$\lim_{\Delta x\to 0}f(\xi)=f(\lim_{\Delta x\to 0}\xi)=f(x)$$

综上, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta x}=f(x)$, 即

$$\Phi'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=f(x).$$

续.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(\xi)$$

注意到 $\xi \in [x, x+\Delta x]$, 故当 $\Delta x \to 0$ 时, $\xi \to x$, 又因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续. 因此

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(\xi) = f(\lim_{\Delta x \to 0} \xi) = f(x)$$

综上, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = f(x)$, 即

$$\Phi'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_a^x f(t)\mathrm{d}t = f(x).$$

同理, 若 $x = a$, 取 $\Delta x > 0$, 可证 $\Phi'_+(a) = f(a)$; 若 $x = b$, 取 $\Delta x < 0$, 可证 $\Phi'_-(b) = f(b)$. □

定理 2

如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 那么函数

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数.

- 连续函数的原函数一定存在.
- 原函数可以表示为一个积分上限函数.

定理 3 (微积分基本定理)

如果函数 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的一个原函数, 那么

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \qquad \text{(牛顿-莱布尼兹公式)}$$

证明.

由定理 2, $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数, 且 $F(x)$ 也是一个原函数. 故

$$F(x) - \Phi(x) = C \quad (a \le x \le b)$$

其中 C 为常数.

证明.

由定理 2, $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数, 且 $F(x)$ 也是一个原函数. 故

$$F(x)-\Phi(x)=C \quad (a\le x\le b)$$

其中 C 为常数.

因为 $\Phi(a)=\int_a^a f(t)\mathrm{d}t=0$, 所以由上式 $F(a)=C$.

证明.

由定理 2, $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数, 且 $F(x)$ 也是一个原函数. 故

$$F(x)-\Phi(x)=C \quad (a\le x\le b)$$

其中 C 为常数.

因为 $\Phi(a)=\int_a^a f(t)\mathrm{d}t=0$, 所以由上式 $F(a)=C$.

同样由上式

$$F(b)-\Phi(b)=C=F(a)$$

证明.

由定理 2, $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数, 且 $F(x)$ 也是一个原函数. 故

$$F(x)-\Phi(x)=C \quad (a\le x\le b)$$

其中 C 为常数.

因为 $\Phi(a)=\int_a^a f(t)\mathrm{d}t=0$, 所以由上式 $F(a)=C$.

同样由上式

$$F(b)-\Phi(b)=C=F(a)$$

移项得到

$$\Phi(b)=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a).$$

□

定理 4 (微积分基本定理)

如果函数 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的一个原函数，那么

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \qquad \text{(牛顿-莱布尼兹公式)}$$

- 若 $a > b$，牛顿-莱布尼兹公式同样成立.
- $F(b) - F(a)$ 可记为 $[F(x)]_a^b$，故

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b$$

例 1

求 $\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x$

例 1

求 $\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x$

解: $\frac{x^3}{3}$ 是 x^2 的一个原函数, 故

$$\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$$

例 3

求 $\int_{-3}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x}$

例 3

求 $\int_{-3}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x}$

解: $\frac{1}{x}$ 的一个原函数是 $\ln|x|$, 故

$$\int_{-3}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x} = [\ln|x|]_{-3}^{-1} = \ln|-1| - \ln|-3| = -\ln 3$$

例 4

计算曲线 $y = e^x$ 在区间 [0, 1] 上与 x 轴所围成的平面图形的面积.

例 4

计算曲线 $y = e^x$ 在区间 [0, 1] 上与 x 轴所围成的平面图形的面积.

解: 所求面积为

$$\int_0^1 e^x \mathrm{d}x$$

e^x 的一个原函数是 e^x, 故

$$\int_0^1 e^x \mathrm{d}x = [e^x]_0^1 = e - 1.$$

例 6

证明积分中值定理: 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 则在开区间内至少存在一点 ξ 使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a) \quad (a<\xi<b).$$

例 6

证明积分中值定理: 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 则在开区间内至少存在一点 ξ 使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a) \quad (a<\xi<b).$$

证明.

设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 在 $F(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可导, 由拉格朗日中值定理知, 存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$F(b)-F(a)=F'(\xi)(b-a).$$

由假设 $F'(\xi)=f(\xi)$, 故

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b)-F(a)=F'(\xi)(b-a)=f(\xi)(b-a) \quad (a<\xi<b).$$

例 7

设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续且 $f(x)>0$, 证明函数

$$F(x)=\frac{\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}$$

在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

证明.

由定理 1

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t = xf(x), \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = f(x)$$

故

$$F'(x) = \frac{xf(x)\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - f(x)\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2} = \frac{f(x)\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t}{\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2}$$

又因为对于 $x>0$, $f(t)>0, \forall t\in(0,x)$, 故 $(x-t)f(t)>0$, 由积分中值定理 $\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t > 0$.

因此 $F'(x)>0$, $F(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增. □

设 $f(u)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 若 $\varphi(x)=u\in[a,b]$ 且函数 φ 可导, 则

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}\Phi(\varphi(x))}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}\Phi(u)}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\int_a^{u} f(t)\mathrm{d}t\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \\
&= f[\varphi(x)]\varphi'(x)
\end{aligned}
$$

设 $f(u)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，若 $\varphi(x)=u\in[a,b]$ 且函数 φ 可导，则

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}\Phi(\varphi(x))}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}\Phi(u)}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\int_a^{u} f(t)\mathrm{d}t\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\\ &= f[\varphi(x)]\varphi'(x)\end{aligned}$$

类似地，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t = f[\varphi(x)]\varphi'(x)-f[\psi(x)]\psi'(x)$$

例 8

求 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\int_{\cos x}^{1} e^{-t^2} \mathrm{d}t}{x^2}$

例 8

求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{\cos x}^{1} e^{-t^2}\mathrm{d}t}{x^2}$

解: 此极限为 $\frac{0}{0}$ 型,

例 8

求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_{\cos x}^{1} e^{-t^2}\mathrm{d}t}{x^2}$

解: 此极限为 $\frac{0}{0}$ 型, 因为

$$\int_{\cos x}^{1} e^{-t^2}\mathrm{d}t = -\int_{1}^{\cos x} e^{-t^2}\mathrm{d}t$$

且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\int_{1}^{\cos x} e^{-t^2}\mathrm{d}t\right) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{1}^{\cos x} e^{-t^2}\mathrm{d}t$$

例 8

求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{\cos x}^{1} e^{-t^2}\mathrm{d}t}{x^2}$

解: 此极限为 $\frac{0}{0}$ 型, 因为

$$\int_{\cos x}^{1} e^{-t^2}\mathrm{d}t = -\int_{1}^{\cos x} e^{-t^2}\mathrm{d}t$$

且

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\int_{1}^{\cos x} e^{-t^2}\mathrm{d}t\right) &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{1}^{\cos x} e^{-t^2}\mathrm{d}t\\ &= e^{-\cos^2 x}\cdot(\cos x)'\\ &= -(-e^{-\cos^2 x}\sin x) = e^{-\cos^2 x}\sin x\end{aligned}$$

由洛必达法则

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_{\cos x}^{1} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{-\cos^2 x}\sin x}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{-\cos^2 x}}{2} = \frac{1}{2e}$$

作业

- 教材习题 5-2: 4, 5(1)(2), 8(1)(4)(6)(9), 11(1), 12, 14.